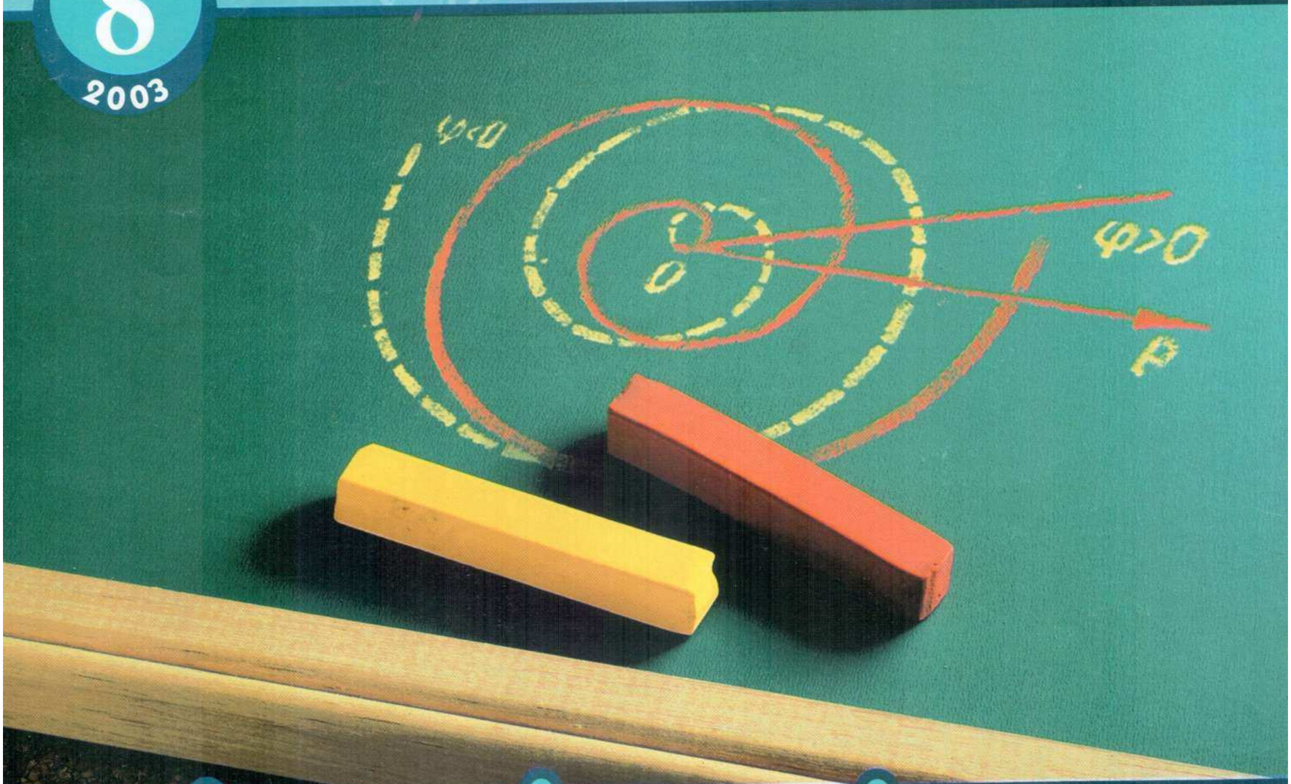
ISSN 0130-3358

научно-теоретический и методический журнал

МАТЕМАТИКА
в школе

8
2003



Юбилейный Псков в задачах и легендах

Классы с углубленным изучением математики

Геометрия Вселенной

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ОСТРОГО УГЛА

Н.В.ИВАНЧУК, Н.А.РЕЗНИК (Мурманск)

Традиционно в школе впервые знакомятся с синусом, косинусом и тангенсом острого угла в VIII классе. Определения вводятся через отношения в прямоугольном треугольнике. Такое представление трудно воспринимается и запоминается восьмиклассниками, – отсутствует опора на зрительное восприятие данных объектов.

Отступление от общепринятых правил

Мы решили пойти несколько иным путем: попытаться дать детям возможность «увидеть» синус и косинус, тангенс и котангенс угла. Естественно, что такому подходу должен был предшествовать подготовительный период.

С помощью таблиц, составленных Н.А.Резник, мы заранее познакомили учащихся с тригонометрической окружностью, уделив особое внимание той ее части, которая расположена в первой координатной четверти. Научились строить с помощью тригонометрической окружности углы величиной 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, причем строили их без транспортира. Эти углы мы назвали «замечательными» (рис. 1, 2).

С помощью теоремы Пифагора учащиеся научились определять «замечательные» координаты на осях, т.е. координаты точки тригонометрической окружности, соответствующей данному углу (рис. 1). Ребята сами заметили закономерность в последовательности чисел на осях (рис. 2).

Затем перешли к «замечательным» числам на правой и верхней касательных, т.е. на осях тангенсов и котангенсов (но этих терминов учащимся мы пока не сообщаем). Используя интуитивные представления о подобии прямоугольных треугольников, составили соответствующие пропорции и нашли числа на касательных (рис. 3), соответствующие углам в 30° и 60°.

Перейдем к описанию двухчасового открытого урока «Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла», который провела *Н.В.Иванчук* в VIII классе Мурманского лицея № 1. На уроке использовались экспериментальные визуальные материалы, подготовленные *Н.А.Резник*.

В самом начале урока мы восстановили на доске первую четверть тригонометрического круга (рис. 1),

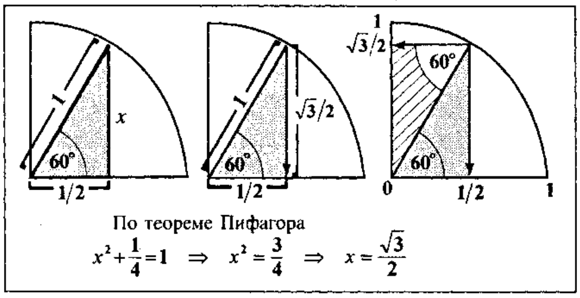


Рис. 1

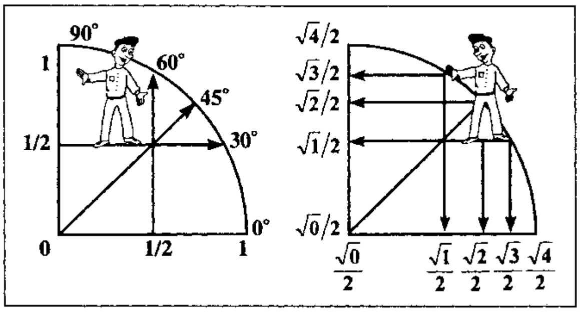


Рис. 2

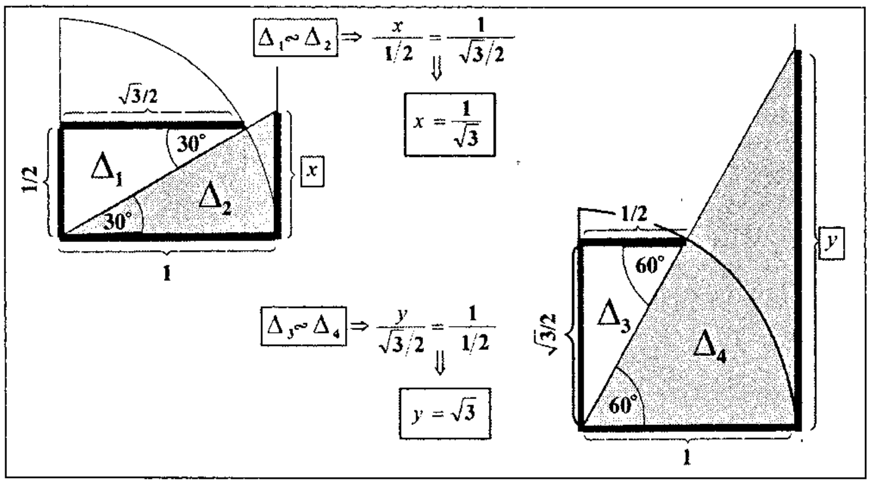


Рис. 3

повторили, какие углы можно построить без транспортира, нашли декартовы координаты точек окружности, соответствующих «замечательным» углам (рис. 2).

Затем были введены обозначения и наименования координат точек на окружности, связанных с произвольным острым углом α. Для этого рассмотрели и обсудили рис. 4. Определили косинус острого угла как *абсциссу точки* тригонометрической окружности, соответствующей заданному углу. Изучение материала по рис. 4 проходило в довольно медленном темпе, так как обсуждались все детали рисунков, обращалось внимание учащихся на выполнение каждого задания.

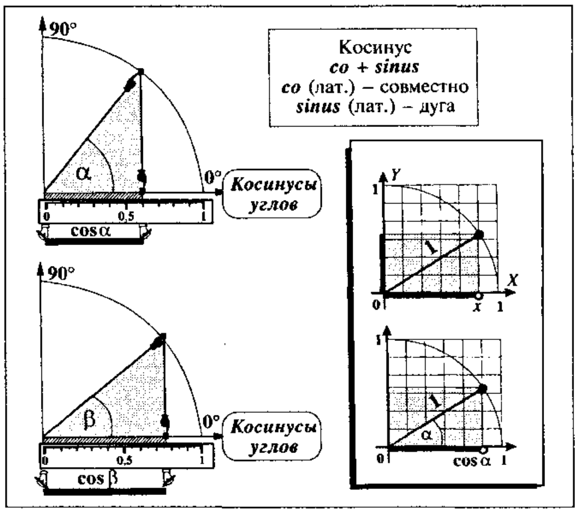


Рис. 4

В левой части рис. 4 мы намеренно отошли от обозначения в виде стрелочки, а остановились на стилизованном изображении ладони с вытянутым указательным пальцем. Этот знак, во-первых, очень напоминает стрелочку, а во-вторых, близок к обычному жесту, который применяется для привлечения внимания. Углы α и β взяты такими, чтобы они не были равны ни 30°, ни 60°, а на шкалах внизу под рисунками хорошо видно что косинусы рассматриваемых углов не равны «замечательному» значению 0,5. Справа на том же рис. 4 даны вполне «серьезные» чертежи, по которым легко объяснить, что $\cos\alpha < 1$ при любом остром угле α.

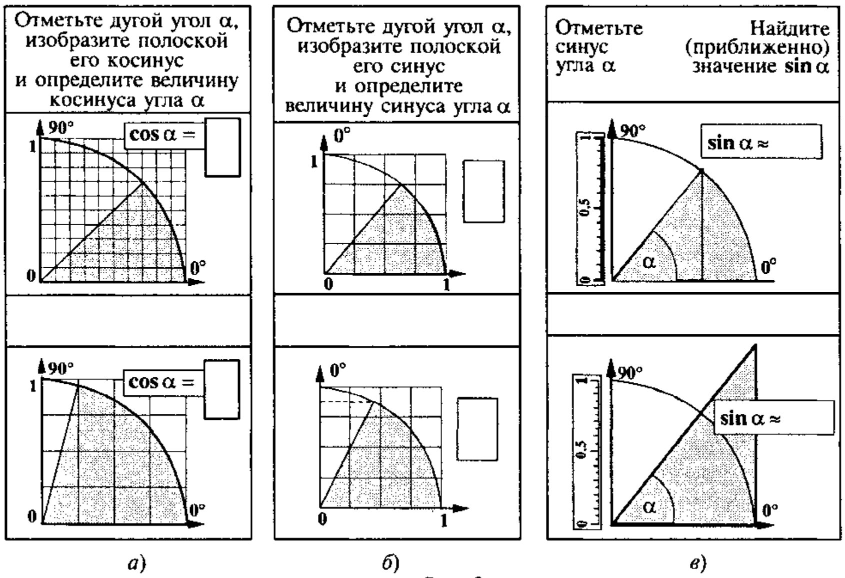


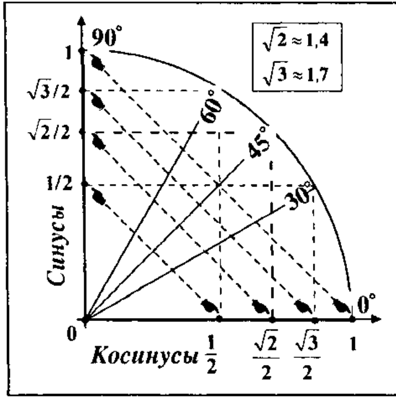
Рис. 5

Затем перешли к упражнению по рис. 5, *а*. Было предложено отметить угол α, заштриховать полоску, соответствующую косинусу этого угла, и с ее помощью определить величину косинуса угла α. Класс сразу втянулся в поиск. Это задание очень понравилось лицеистам, они с удовольствием выполняли его, с интересом проверяли ответы, радовались, что не допустили здесь ни одной ошибки. Это настроило их на успех, на то, что новый материал совсем нетрудный.

Далее учащимся надо было ответить, как можно найти синус острого угла. После обсуждения всех предположений ребята установили, что надо найти ординату *конца радиуса* тригонометрической окружности, образующего угол α. Поэтому задания по рис. 5, *б* у основной массы не вызвали затруднений.

Перед выполнением задания по рис. 5, *в* необходимо было определить сходство и различие между выделенными треугольниками, потом произвести сравнение с рисунками предыдущего задания того же блока.

По рис. 6 ребята получили представления о линиях синусов и косинусов, установили связи между декартовыми и тригонометрическими координатами. В результате пришли к выводу: так как на оси абсцисс находят только косинусы углов, то эту ось можно назвать линией косинусов. Аналогично ось ординат можно называть линией синусов. Особое внимание было уделено тому, что и синус, и косинус острого угла — это конкретные



1 Тест

Вычислите и укажите ответ	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	2	3
$\sin^2 30° + \cos^2 60°$								
$\sin^2 45° + \cos^2 45°$								
$\sin^2 60° + \cos^2 60°$								
$\sin^2 90° + \cos^2 0°$								
$\sin^2 90° + \cos^2 90°$								

Рис. 6

числа, всегда меньшие единицы. Следовательно, «линия синусов» и «линия косинусов» в первой четверти – это только отрезки соответствующих координатных осей.

Теперь пришло время закрепить изученное в ходе самостоятельной работы (тест на рис. 6, справа). Учащиеся ранее выполняли основную часть предложенных заданий, поэтому работа проходила интенсивно.

На следующем этапе мы вплотную подошли к понятиям тангенса и котангенса острого угла.

Проанализировав верхнюю часть рис. 7, мы назвали отношение синуса острого угла к его косинусу тангенсом данного угла. Внимательно рассмотрев выделенные треугольники на рис. 7 вверху, ребята установили, что треугольники подобны. Затем составили соответствующие пропорции и убедились в эквивалентности двух определений тангенса: через синус и косинус и через отношение катетов. Подчеркнули, что тангенс острого угла – это *число*, соответствующее длине отрезка правой касательной, заключенного между сторонами данного угла.

Нижнюю часть рис. 7, которая посвящена изображению и измерению котангенсов, восьмиклассники рассмотрели самостоятельно, затем прочитали теоретический материал в учебнике и сделали вывод, что тангенс и котангенс одного и того же угла – взаимнообратные величины.

Ребята немного повеселились, рассматривая человечков, и задались вопросом, почему же они изображены различными по росту: чем дальше человечек уходит вправо по линии котангенсов, тем заметнее он вырастает. Ребята догадались, что таким образом передается особенность «поведения» котангенсов острых углов: при увеличении угла значения котангенсов уменьшаются. Значения же тангенсов по мере возрастания угла увеличиваются.

Умения применять полученные знания к решению практических задач вырабатывались по рис. 8. Подробно разбирались все нюансы построений.

С помощью I тренажера ребята учились считывать со шкалы значения тангенсов соответствующих углов:

$\operatorname{tg}\alpha = 0,3$, $\operatorname{tg}\beta = 0,5$, $\operatorname{tg}\gamma = 1$, $\operatorname{tg}\delta = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = 3$.

Теперь легко было сделать вывод, что тангенсы углов возрастают неограниченно при приближении соответствующего угла к прямому. Аналогичная работа по оси котангенсов проводилась с помощью II тренажера. Третий тренажер дает возможность потренироваться в нахождении $\operatorname{ctg}\alpha$, если угол α задан: а) непосредственно, б) значением его тангенса, в) отношением $\sin\alpha$ к $\cos\alpha$, г) отдельными значениями $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Последний тренажер (IV) дает возможность проверить по чертежу, что конкретные значения функций $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ (при $\alpha = 45°$) симметричны относительно биссектрисы координатного угла.

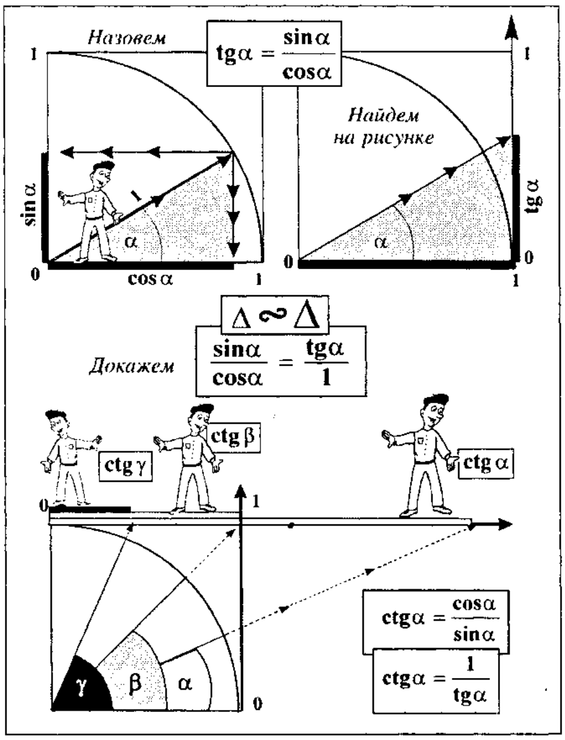


Рис. 7

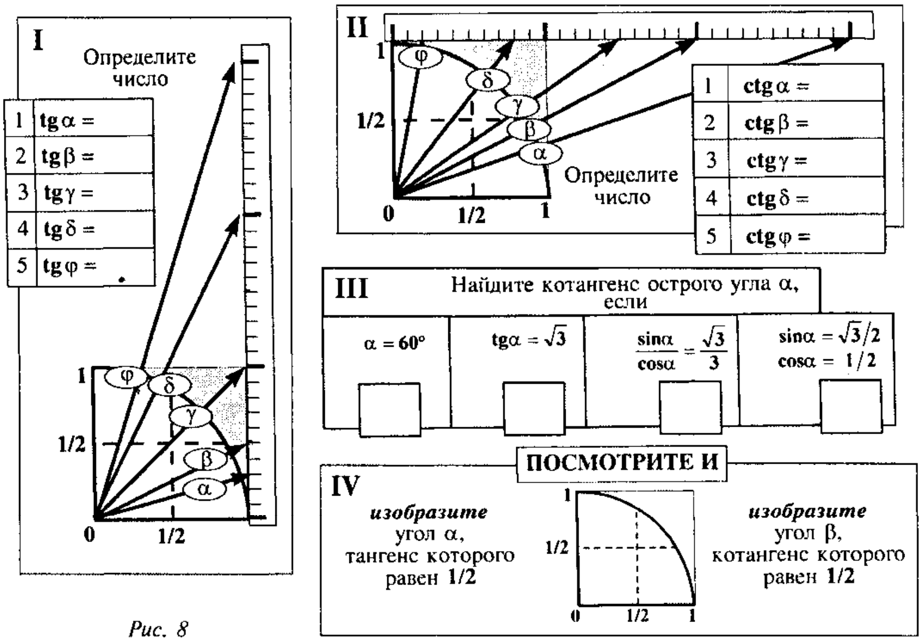


Рис. 8

Завершили первый урок подведением итогов: перечислили, что нового узнали, чему научились.

Восстановление традиций

После изучения темы «Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла» на последующих занятиях перешли к рассмотрению данных понятий через отношения в прямоугольном треугольнике.

Прежде чем говорить об отношениях в треугольнике, необходимо было остановиться на повторении понятия «*отношение*», так как опыт показывает, что учащиеся плохо понимают смысл этого слова.

Довольно быстро вспомнили арифметическую запись отношения и рассмотрели пример отношения длин сторон треугольника. Обсудили особенности задания отношений сторон в прямоугольном треугольнике. Выполнили упражнение, в котором требовалось завершить запись:

а) $AB=\frac{1}{2}AC \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\ldots$; б) $AC=\frac{1}{3}AB \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\ldots$;

в) $AB=\frac{3}{2}AC \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\ldots$; г) $5AC=2AB \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\ldots$.

Затем перешли к упражнению, в котором повторялось свойство биссектрисы угла треугольника, изученное ранее в теме «Подобие треугольников». Ребята восстановили пропорции, у которых на рис. 9 были записаны только первые отношения.

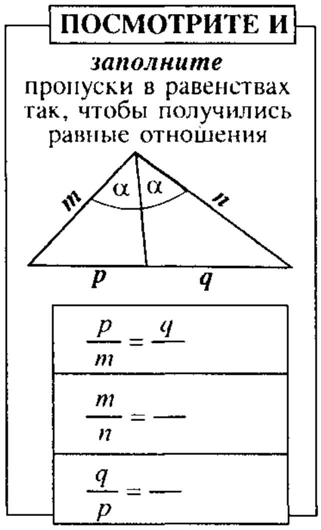


Рис. 9

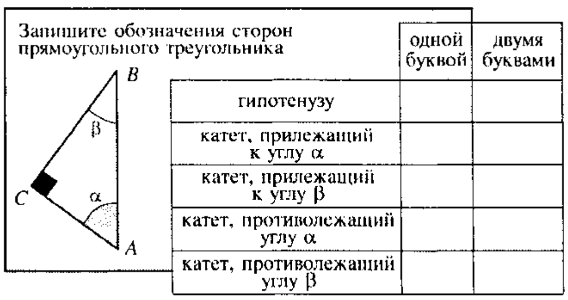


Рис. 10

По рис. 10 школьники быстро повторили различные способы обозначения сторон прямоугольного треугольника.

На рис. 11 прямоугольный треугольник располагается таким образом, что один из его острых углов находится в центре тригонометрического круга. В задании предполагалось, что, зная длины сторон треугольника, учащиеся будут составлять соответствующие пропорции для нахождения значений данных отношений. Но лицеисты сначала по данным числам находили величину угла (и это послужило, причем спонтанно, пропедевтикой к изучению дальнейшего материала). Ученики составляли «многоэтажные» дроби, сокращали общие множители и применяли изученный ранее алгоритм преобразования такой дроби. Таким образом, параллельно повторили и закрепили навыки преобразования «многоэтажных» дробей.

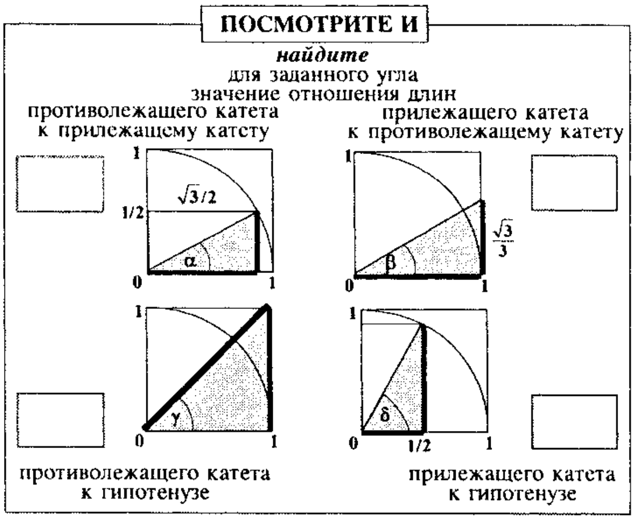


Рис. 11

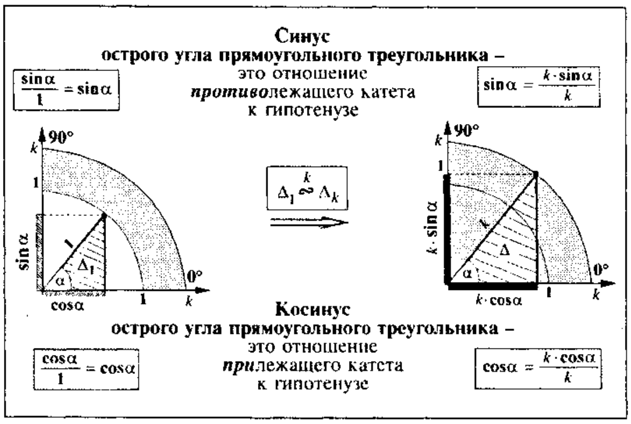


Рис. 12

На рис. 12 треугольник также рассматривается с вершиной в центре тригонометрического круга, причем одна сторона угла лежит на оси абсцисс, а другая находится в первой четверти координатной плоскости. Учитель привлек внимание учащихся к тому, что вершина второго острого угла в данном треугольнике находится на окружности и, следовательно, гипотенуза этого треугольника равна 1.

Используя понятия синуса и косинуса острого угла как координат точки тригонометрической окружности, мы установили, что длина катета, прилежащего данному углу, равна косинусу этого угла, а длина катета, противолежащего данному углу, равна, соответственно, синусу этого угла. Затем нашли отношение каждого катета к гипотенузе и установили, что оно равно в первом случае косинусу данного угла, а во втором – синусу этого угла.

Переход к рассмотрению произвольной окружности радиуса k оказался совершенно естественным. Учащиеся заметили, что заштрихованные треугольники Δ_1 и Δ_k подобны, и доказали замеченный факт. Далее установили, что у треугольника Δ_1 гипотенуза равна 1, а у треугольника Δ_k гипотенуза равна k, поэтому коэффициент подобия равен k.

По рис. 12 нашли отношение каждого катета данного треугольника к его гипотенузе и убедились, что во втором случае получились те же значения, что и в первом.

Для вывода определения тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике применялся тот же принцип, что для синуса и косинуса. Поэтому изучение данного материала прошло в более быстром темпе и не вызвало у учащихся заметных затруднений.

Упражнения по рис. 13 выполнили быстро и правильно все учащиеся. Этому помогли и подсказки, оформленные в виде различных указателей к ходу рассуждений.

Действительно, задача *а*) решается мгновенно по определению тангенса острого угла. Так как катеты этого треугольника равны, то $\operatorname{tg}\angle BAC = 1$. В случае *б*) треугольник разносторонний. Курсивная стрелочка указывает на порядок катетов треугольника при составлении искомого отношения. Равнобедренный треугольник (случай *в*) можно разбить на два прямоугольных.

В задаче *г*) нужно распространить осваиваемый алгоритм на случай произвольного разностороннего треугольника. Последнее задание *д*) несколько сложнее: нужно увидеть, что треугольник ABC равнобедренный с прямым углом при вершине C.

По рис. 10 школьники быстро повторили различные способы обозначения сторон прямоугольного треугольника.

На рис. 11 прямоугольный треугольник располагается таким образом, что один из его острых углов находится в центре тригонометрического круга. В задании предполагалось, что, зная длины сторон треугольника, учащиеся будут составлять соответствующие пропорции для нахождения значений данных отношений. Но лицеисты сначала по данным числам находили величину угла (и это послужило, причем спонтанно, пропедевтикой к изучению дальнейшего материала). Ученики составляли «многоэтажные» дроби, сокращали общие множители и применяли изученный ранее алгоритм преобразования такой дроби. Таким образом, параллельно повторили и закрепили навыки преобразования «многоэтажных» дробей.

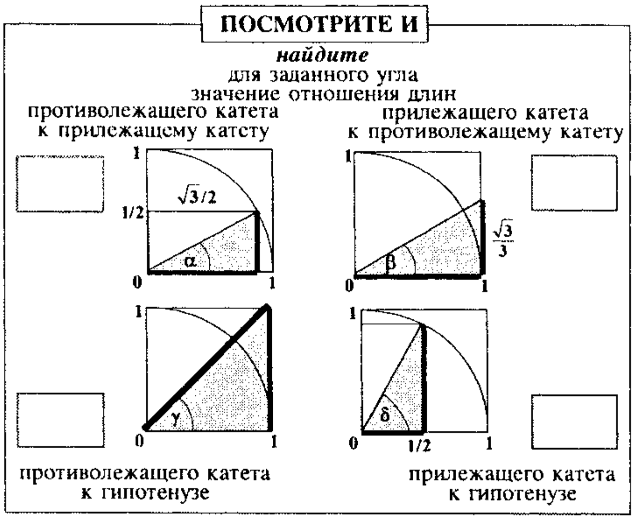


Рис. 11

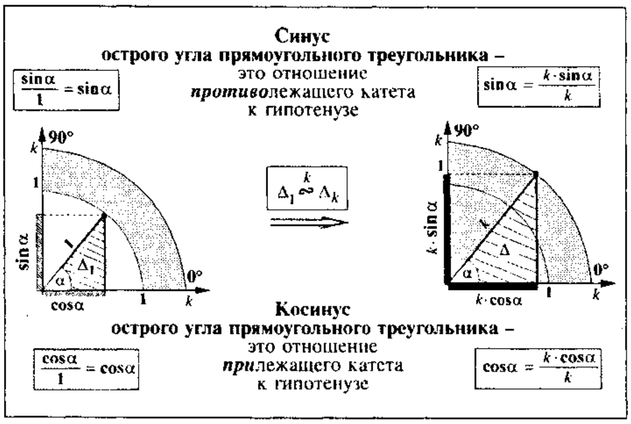


Рис. 12

На рис. 12 треугольник также рассматривается с вершиной в центре тригонометрического круга, причем одна сторона угла лежит на оси абсцисс, а другая находится в первой четверти координатной плоскости. Учитель привлек внимание учащихся к тому, что вершина второго острого угла в данном треугольнике находится на окружности и, следовательно, гипотенуза этого треугольника равна 1.

Используя понятия синуса и косинуса острого угла как координат точки тригонометрической окружности, мы установили, что длина катета, прилежащего данному углу, равна косинусу этого угла, а длина катета, противолежащего данному углу, равна, соответственно, синусу этого угла. Затем нашли отношение каждого катета к гипотенузе и установили, что оно равно в первом случае косинусу данного угла, а во втором – синусу этого угла.

Переход к рассмотрению произвольной окружности радиуса k оказался совершенно естественным. Учащиеся заметили, что заштрихованные треугольники Δ_1 и Δ_k подобны, и доказали замеченный факт. Далее установили, что у треугольника Δ_1 гипотенуза равна 1, а у треугольника Δ_k гипотенуза равна k, поэтому коэффициент подобия равен k.

По рис. 12 нашли отношение каждого катета данного треугольника к его гипотенузе и убедились, что во втором случае получились те же значения, что и в первом.

Для вывода определения тангенса острого угла в прямоугольном треугольнике применялся тот же принцип, что для синуса и косинуса. Поэтому изучение данного материала прошло в более быстром темпе и не вызвало у учащихся заметных затруднений.

Упражнения по рис. 13 выполнили быстро и правильно все учащиеся. Этому помогли и подсказки, оформленные в виде различных указателей к ходу рассуждений.

Действительно, задача *а*) решается мгновенно по определению тангенса острого угла. Так как катеты этого треугольника равны, то $\operatorname{tg}\angle BAC = 1$. В случае *б*) треугольник разносторонний. Курсивная стрелочка указывает на порядок катетов треугольника при составлении искомого отношения. Равнобедренный треугольник (случай *в*) можно разбить на два прямоугольных.

В задаче *г*) нужно распространить осваиваемый алгоритм на случай произвольного разностороннего треугольника. Последнее задание *д*) несколько сложнее: нужно увидеть, что треугольник ABC равнобедренный с прямым углом при вершине C.

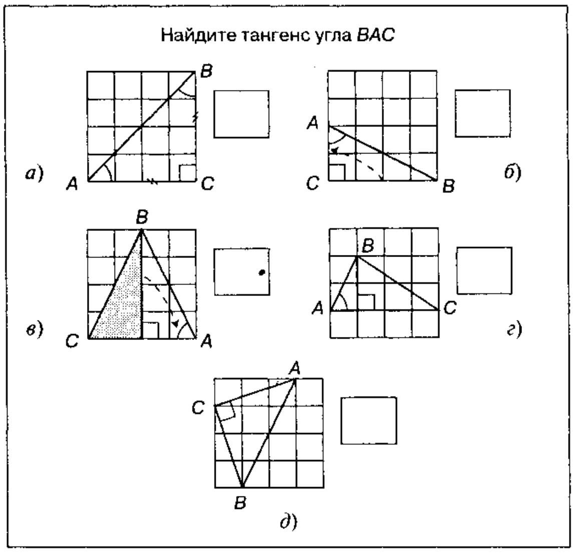


Рис. 13

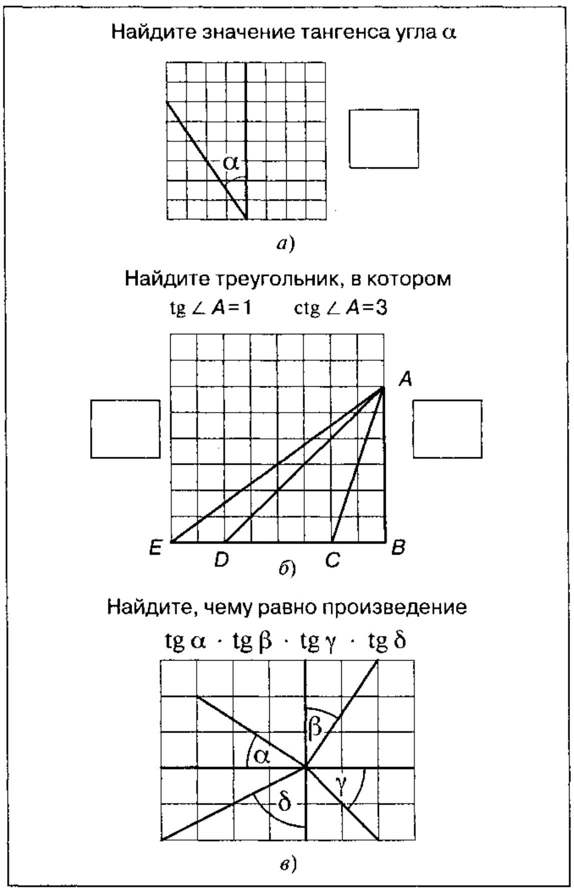


Рис. 14

Урок заканчивается упражнениями по рис. 14.

На рис. 14, *а* треугольник не изображен, его надо было достроить самостоятельно. По рис. 14, *б* фактически надо было решить тригонометрическое уравнение, исходя из здравого смысла, поскольку учащиеся еще ничего не слышали о тригонометрических уравнениях.

По рис. 14, *в* надо было вычислить значения тригонометрических функций конкретных углов, которые лежат в *разных* четвертях тригонометрического круга. А мы весь урок говорили только о тех углах, которые лежат в первой четверти. Надо было использовать свои знания в новой ситуации.

Таким образом, мы показали, что при введении обсуждаемых понятий как координат точек на тригонометрической окружности появляется возможность значительно расширить запас сведений — добавляется котангенс острого угла, обсуждаются значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов, величина которых 0 или 90 градусов. Плюс к этому есть возможность провести большую подготовительную работу для изучения тригонометрии в X классе.

Дети не только увидели синус и косинус угла, но и сами вывели определения синуса и косинуса острого угла прямоугольного треугольника. И это произошло отнюдь не формально. При таком подходе ученики участвуют в процессе поиска и сами «открывают» новые для них знания.

Литература

Резник Н.А. Визуальные задачи для эпидиаскопа и дисплея с указаниями, ответами и решениями по курсу «Тригонометрия». Экспериментальные материалы для учителей и родителей: Метод. пособие. В 2 частях. — Мурманск, 1994.