Система 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными

1 *Матрица и определитель системы*

Система 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными

$$S_3 : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

Коэффициенты (*постоянные*) $\left\{ \begin{matrix} a_1, & b_1, & c_1, \\ a_2, & b_2, & c_2, \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{matrix} \right.$ $\quad \underbrace{x,\ y,\ z}$ Неизвестные (*переменные*) $\quad \left. \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{matrix} \right\}$ Свободные члены (*постоянные*)

Матрица системы 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными

Расширенная матрица системы

$$\left. \begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array} \right)$$

Такую запись применяли древнекитайские математики во II веке до нашей эры

Главный определитель системы 3-х линейных уравнений с 3-мя неизвестными

$$\left. \begin{matrix} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

квадратная матрица системы — *главный определитель системы*

ПОСМОТРИТЕ И *восстановите* отсутствующие элементы

1 $\begin{pmatrix} k_1 & \square & k_3 \\ \square & l_2 & \square \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ матрицы

2 $\begin{vmatrix} a_1 & \square & c_1 \\ \square & b_2 & \square \\ a_3 & b_3 & \square \end{vmatrix}$ определителя

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

Размерность матрицы и порядок определителя

2

У квадратной матрицы У определителей
системы 3-х уравнений с 3-мя неизвестными
различают
ряды
(столбцы и строки)

Нумерация столбцов

Нумерация строк

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \end{array}$$

Квадратную матрицу системы обозначают символом $\boldsymbol{M}^{3\times3}$ и говорят: ***матрица размерности*** **3×3**

Определители системы обозначают символом D_3 и говорят: ***определитель 3-го порядка***

Также различают диагонали

матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ определителя

Побочная диагональ $\qquad$ Главная диагональ $\qquad$ Побочная диагональ $\qquad$ Главная диагональ

ПОСМОТРИТЕ И

определите
для заданной системы

1 значения элементов побочной диагонали ее главного определителя

$$S_3\!: \begin{cases} 4z - 3x - 2y = 5 \\ 3x - y - 5 = -2x \\ 7 = 2y - x - 5x \end{cases}$$

2 значения элементов главной диагонали ее квадратной матрицы

3 *Структура определителя 3-го порядка*

У определителя 3-го порядка каждый элемент 1-й строки

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_1 \quad b_1 \quad c_1} \\ a_2 \quad b_2 \quad c_2 \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{vmatrix}$$

находится в определенном столбце:

Для такого элемента можно найти определитель 2-го порядка

$$\begin{array}{ccc} & \text{1-й} & & \\ \Bigg| & \boxed{a_1} & & \Bigg| \\ & & b_2 & c_2 \\ & & b_3 & c_3 \\ & & \text{2-й} & \text{3-й} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \text{2-й} & \\ & \boxed{b_1} & \\ a_2 & & c_2 \\ a_3 & & c_3 \\ \text{1-й} & & \text{3-й} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & \text{3-й} \\ & & \boxed{c_1} \\ a_2 & b_2 & \\ a_3 & b_3 & \\ \text{2-й} & \text{3-й} & \end{array}$$

с элементами в других его строках и столбцах

ПОСМОТРИТЕ И ***запишите*** определитель 2-го порядка, получающийся после вычеркивания в определителе 3-го порядка

1) 1-й строки и 1-го столбца
$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$$

2) 1-й строки и 3-го столбца
$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{vmatrix}$$

3) 1-й строки и 2-го столбца
$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{7} & \mathbf{9} & \mathbf{8} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$$

4) 1-й строки и 2-го столбца
$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{9} & \mathbf{8} & \mathbf{7} \\ \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$$

запишите

ПОСМОТРИТЕ И

Получаемые определители 2-го порядка называют ***минорами*** и говорят:

$\boxed{a_1}$ $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ минор элемента $\boldsymbol{a_1}$

$\boxed{b_1}$ $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ минор элемента $\boldsymbol{b_1}$

$\boxed{c_1}$ $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ минор элемента $\boldsymbol{c_1}$

ПОСМОТРИТЕ И ***запишите***

5) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{-5} & \mathbf{6} \\ x & y & z \end{vmatrix}$ минор элемента a_1

6) минор элемента a_2 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ m & \mathbf{2} & -x \\ -n & \mathbf{4} & y \end{vmatrix}$

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

Разложение определителя по его первой строке **4**

Если в определителе каждому минору элемента его 1-й строки приписать свой знак:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \boxed{a_1 \quad b_1 \quad c_1} \\ a_2 \quad b_2 \quad c_2 \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array}$$

$$a_1: \ \boxed{+}\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad b_1: \ \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}\boxed{-} \qquad c_1: \ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\boxed{+}$$

то его разложение по первой строке получается в виде: $\Delta_3 = +a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

С учетом порядка букв в 1-й строке определителя можно записать так:

$$\Delta_3 = +\ a_1 b_2 c_3 + b_1 a_3 c_2 + c_1 a_2 b_3 - a_1 b_3 c_2 - b_1 a_2 c_3 - c_1 a_3 b_2$$

Например:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$+1 \cdot (-3) - (-2) \cdot (-8) + 3 \cdot (-1) = 8$$

1 **ПОСМОТРИТЕ И** ***вычислите***

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \square \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \square \cdot \begin{vmatrix} \square & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} =$$

2 МАТРИЦА	Для каждого определителя				
Раскрытие определителя 3-го порядка по 1-й строке	вычислите минор к элементу 1-й строки: 1-го столбца	2-го столбца	3-го столбца	раскройте определитель по элементам 1-й строки	найдите значение
$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$					
$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$					
$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$					
$\begin{vmatrix} 0 & -5/2 & 5 \\ 2 & -3/2 & 0 \\ 2 & 0 & -1/2 \end{vmatrix}$					

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

5 *Миноры определителя 3-го порядка*

Минор можно построить
для любого элемента определителя 3-го порядка.

Минор, *соответствующий заданному элементу* определителя третьего порядка, строится так:

$$\begin{vmatrix} & b_1 & c_1 \\ \boxed{a_2} & & \\ & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & & c_1 \\ a_2 & & c_2 \\ & \boxed{b_3} & \end{vmatrix}$$

мысленно выделяется этот элемент и вычеркиваются остальные элементы той же строки и того же столбца

Например:

Выбор элемента

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Нахождение минора элемента

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Элемент	его минор
2	$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$

ПОСМОТРИТЕ И ***запишите***

1 минор к элементу a_2 ☐

$$\begin{vmatrix} 0 & 8 & 1 \\ a_2 & 3 & -7 \\ 0 & -1 & c_3 \end{vmatrix}$$

2 минор к элементу c_3 ☐

ПОСМОТРИТЕ И ***определите***

к какому элементу определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

найден его минор

3 ☐ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$

4 $\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$ ☐

5 ☐ $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$

6 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ ☐

определите

ПОСМОТРИТЕ И

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

Таблица знаков для миноров

6

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

В определителе 3-го порядка каждому минору присваивается свой знак:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Таблица знаков для миноров

Выбор элемента

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & \boxed{-} & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \longrightarrow \boxed{b_1}\ \boxed{-}\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Нахождение минора элемента

Элемент — его минор со знаком

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \boxed{\mathbf{2}} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & \boxed{-} & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \longrightarrow \boxed{\mathbf{2}}\ \boxed{}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

Составьте сами

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \boxed{\mathbf{5}} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & \boxed{+} & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \longrightarrow \boxed{\mathbf{5}}\ \boxed{}\begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

Нахождение минора элемента

Элемент — его минор со знаком

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \boxed{\mathbf{3}} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} + & - & \boxed{+} \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \longrightarrow \boxed{\mathbf{3}}\ \boxed{+}\begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{vmatrix}$$

1 Тест

Для определителя
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
найдите значение минора (с соответствующим знаком)

к элементу	–6	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5	6
x_2													
y_1													
y_3													
z_2													
z_3													

7

Разложение определителя по любой строке

В разложении определителя по элементам его 1-й строки с учетом порядка ее букв, их индексов

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \boxed{a_1 \quad b_1 \quad c_1} \\ a_2 \quad b_2 \quad c_2 \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{vmatrix} \qquad \boxed{+}\ \boxed{-}\ \boxed{+}$$

и соответствующих знаков их миноров

первыми множителями слагаемых являются элементы 1-й строки:

$$\Delta_3 = +\boxed{a_1}b_2c_3 + \boxed{b_1}a_3c_2 + \boxed{c_1}a_2b_3 - \boxed{a_1}b_3c_2 - \boxed{b_1}a_2c_3 - \boxed{c_1}a_3b_2$$

Если изменить порядок множителей в этих слагаемых, так, чтобы первыми в них оказались элементы 2-й строки, а затем изменить порядок самих слагаемых,

$$\Delta_3 = +\boxed{a_2}b_3c_1 + \boxed{b_2}a_1c_3 + \boxed{c_2}a_3b_1 - \boxed{a_2}c_3b_1 - \boxed{b_2}a_3c_1 - \boxed{c_2}b_3a_1$$

то получится разложение этого же определителя по элементам его 2-й строки

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 \quad b_1 \quad c_1 \\ \boxed{a_2 \quad b_2 \quad c_2} \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{vmatrix} \qquad \boxed{-}\ \boxed{+}\ \boxed{-}$$

с соответствующими знаками их миноров

При аналогичных рассуждениях:

$$\Delta_3 = +\boxed{a_3}b_1c_2 + \boxed{b_3}a_2c_1 + \boxed{c_3}a_1b_2 - \boxed{a_3}b_2c_1 - \boxed{b_3}c_2a_1 - \boxed{c_3}a_2b_1$$

получается разложение того же определителя по элементам его 3-й строки:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 \quad b_1 \quad c_1 \\ a_2 \quad b_2 \quad c_2 \\ \boxed{a_3 \quad b_3 \quad c_3} \end{vmatrix} \qquad \boxed{+}\ \boxed{-}\ \boxed{+}$$

с соответствующими знаками их миноров

Например:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{\boxed{-\ +\ -}}_{\textit{мысленно}} = -0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 + 4 = 3$$

1

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{\boxed{+\ -\ +}}_{\textit{мысленно}} =$$

ПОСМОТРИТЕ И ***сравните*** результаты

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \underbrace{\boxed{+\ -\ +}}_{\textit{мысленно}} =$$

2

Разложение определителя по любому ряду

8

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

При разложении определителя 3-го порядка полную таблицу знаков миноров элементов можно читать по столбцам / по строкам

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Например, знаки в соответствующем столбце учитывают при посотроении миноров элементов этого столбца:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \boxed{+} & a_1 & b_1 & c_1 \\ \boxed{-} & a_2 & b_2 & c_2 \\ \boxed{+} & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \boxed{-} & b_1 & c_1 \\ a_2 & \boxed{+} & b_2 & c_2 \\ a_3 & \boxed{-} & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \boxed{+} & c_1 \\ a_2 & b_2 & \boxed{-} & c_2 \\ a_3 & b_3 & \boxed{+} & c_3 \end{vmatrix}$$

Таким образом:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{matrix} + \\ - \\ + \end{matrix}}_{\textit{мысленно}} = +(-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\cdot(2-3) + 1\cdot(1-6) - 1\cdot(1-4) = 0$$

1 Серия — Укажите (затушуйте) ряд определителя, по которому осуществлено его разложение

1
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

2
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

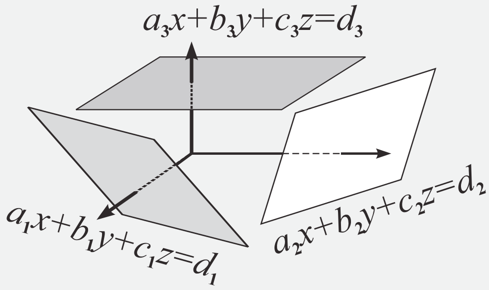
3
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

4
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

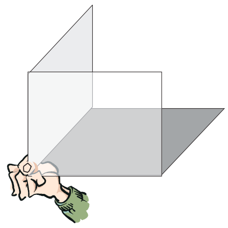
2 Докажите, что
$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & x & \mathbf{0} \\ x & \mathbf{1} & x \\ \mathbf{0} & x & \mathbf{0} \end{vmatrix}\cdot x = \mathbf{0}$$
разложив определитель по его 2-й строке

9 *Геометрическая интерпретация системы*

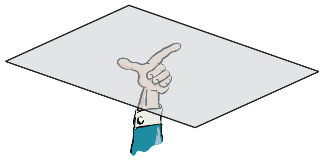
Каждое
линейное уравнение
с 3-мя неизвестными
можно изобразить
плоскостью
в декартовых координатах



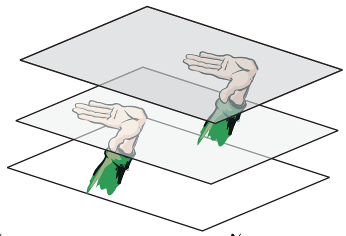
Систему уравнений
$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$
можно решить графически



единственное решение

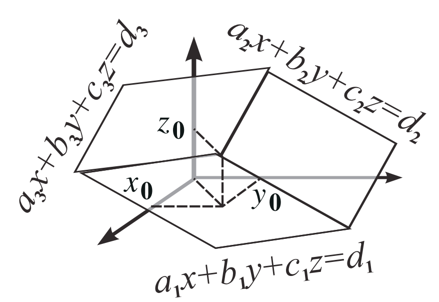


множество решений



решений нет

Если
эти плоскости
пересекаются,
то есть
имеют
одну общую точку,



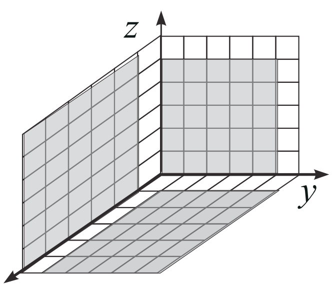
то
координаты этой точки
$(x_0; y_0; z_0)$
являются
решением
данной системы.

$\Downarrow$ Единственная общая точка $\Longrightarrow$ Только одна тройка координат (чисел) $\Longrightarrow$

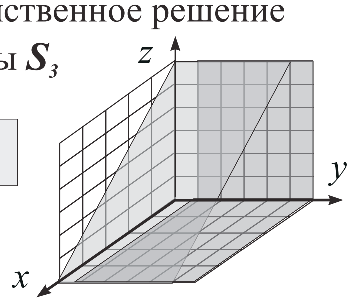
$\Downarrow$
$\exists!$
(*существует и единственно*)
решение системы S_3

1 **ПОСМОТРИТЕ И** ***найдите***
решение системы S_3

$$\begin{cases} x_0 = \\ y_0 = \\ z_0 = \end{cases}$$



2 **ПОСМОТРИТЕ И** ***найдите***
существует ли
единственное решение
системы S_3



10

Правило Крамера

$$S_3: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Если

$\Delta \neq 0$

$\Downarrow$

$\exists!$ *решение для* S_2

Правило Крамера

Чтобы узнать,
имеет ли система единственное решение
нужно проверить,
равен ли нулю ее главный определитель.

Например:

По матрице системы линейных уравнений $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 3 \end{pmatrix}$ и столбцу ее свободных членов $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

восстановите эту систему
и докажите, что она имеет единственное решение
при любых a, b и c

Решение

$$\left.\begin{aligned} x \qquad\qquad &= 3 \\ ax + 2y \qquad &= 2 \\ bx + cy + 3z &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

Следовательно,
данная система
имеет единственное решение
при любых a, b и c

3 МАТРИЦА	Для каждой системы				
Теорема Крамера	найдите значение ее определителей				найдите решение системы
	Δ	Δ_x	Δ_y	Δ_z	
$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$					
$\begin{cases} -x + y = 2 \\ x - y + 2 = 0 \\ 2x + y - z = -1 \end{cases}$					
$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + 3z = -4 \\ 2z + y = 0 \end{cases}$					
$\begin{cases} x = -2 - 2y - 3z \\ -3z = 12 - x \\ 2y + z = 1 \end{cases}$					

Резник Н.А., Неделько Н.С., Ежова Н.М., Начальные представления о матрицах и определителях: Визуальный конспект. Мурманск, Изд-во МГИ, 2003. – 44 с.

Информационная схема «ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА»

***Матрица системы размерности* 3×3**

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

Главный определитель системы 3-го порядка

$$M^{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \mathrm{D}_3$$

Элементы определителя и их миноры

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_1} & & \\ & b_2 & c_2 \\ & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} & b_1 & c_1 \\ \boxed{a_2} & & \\ & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & & c_1 \\ & \boxed{b_2} & \\ a_3 & & c_3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \\ a_2 & b_2 & \\ & & \boxed{c_3} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} & & \boxed{c_1} \\ a_2 & b_2 & \\ a_3 & b_3 & \end{vmatrix}$$

Разложение определителя

по 2-му столбцу

$$\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{b_1} & c_1 \\ a_2 & \boxed{b_2} & c_2 \\ a_3 & \boxed{b_3} & c_3 \end{vmatrix}$$

по 3-й строке

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \boxed{a_3} & \boxed{b_3} & \boxed{c_3} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

по 2-й строке

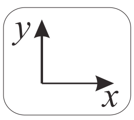
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \boxed{a_2} & \boxed{b_2} & \boxed{c_2} \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

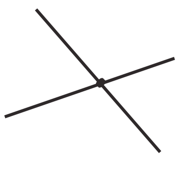
по 1-му столбцу

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_1} & b_1 & c_1 \\ \boxed{a_2} & b_2 & c_2 \\ \boxed{a_3} & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Теорема Крамера

Прямые пересекаются в одной точке





Если

$$\boxed{\Delta \neq \mathbf{0}}$$

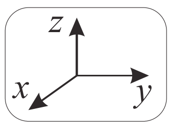
$$\Downarrow$$

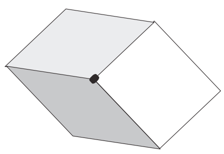
$$\exists!$$

решение системы

$\Longleftarrow$ $\Longrightarrow$

Плоскости пересекаются в одной точке

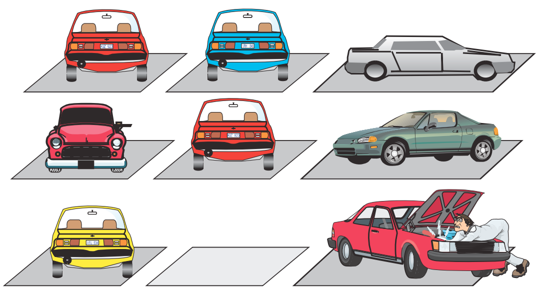




1

ПОСМОТРИТЕ И

укажите
номер свободного места на стоянке автомобилей, используя принцип нумерации элементов определителя



2

ПОСМОТРИТЕ И

найдите
значение элемента матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

$a_1 =$

$b_2 =$

$c_3 =$

$b_3 =$

3 Тест В каждом определителе найдите минор

для заданного элемента	$\begin{vmatrix} \ast & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \ast & \ast \\ \ast & \ast \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \ast & 0 \\ 0 & \ast \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \ast & \ast \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & \ast \\ \ast & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \ast & \ast \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \ast & \ast \\ 0 & \ast \end{vmatrix}$
$\begin{vmatrix} \ast & \ast & 0 \\ 0 & \ast & 0 \\ 0 & \ast & \ast \end{vmatrix}$ для b_3							
$\begin{vmatrix} 0 & \ast & \ast \\ \ast & \ast & 0 \\ 0 & 0 & \ast \end{vmatrix}$ для c_1							
$\begin{vmatrix} \ast & \ast & \ast \\ 0 & \ast & 0 \\ 0 & \ast & \ast \end{vmatrix}$ для b_2							
$\begin{vmatrix} \ast & 0 & \ast \\ \ast & 0 & \ast \\ 0 & \ast & \ast \end{vmatrix}$ для c_2							

4

ПОСМОТРИТЕ И

вычислите
(устно!!!)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 99999 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

5

$$\begin{vmatrix} 98765 & 0 & 0 \\ 12345 & 2 & 1 \\ 24680 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

6 Тест

По заданному минору $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$ найдите определитель

для элемента	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a_3 \\ -4 & 3 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_2 & -2 \\ -4 & c_2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & -2 & b_3 \\ -4 & 3 & c_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & -2 & a_3 \\ b_3 & b_2 & b_3 \\ -4 & 3 & c_3 \end{vmatrix}$
a_2				
a_3				
b_3				
c_3				

7 **ПОСМОТРИТЕ И** **8**

$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ 0 & b_3 & 0 \end{vmatrix}$ ***найдите*** значение определителя $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix}$

9 Докажите, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \delta & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

10 Тест

Найдите определитель

равный	$\begin{vmatrix} * & 0 & 0 \\ \circ & 2 & 1 \\ \bullet & 5 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \circ & * & \bullet \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \circ & 5 & 2 \\ \bullet & 0 & 0 \\ * & 3 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & \circ & 3 \\ 3 & \bullet & 5 \\ 2 & * & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & \circ & 1 \\ 0 & \bullet & 0 \\ 5 & * & 2 \end{vmatrix}$
$*$					
$\circ$					
$\bullet$					